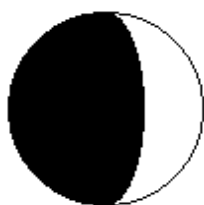


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Централна комисия за провеждане на олимпиадата по АСТРОНОМИЯ

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

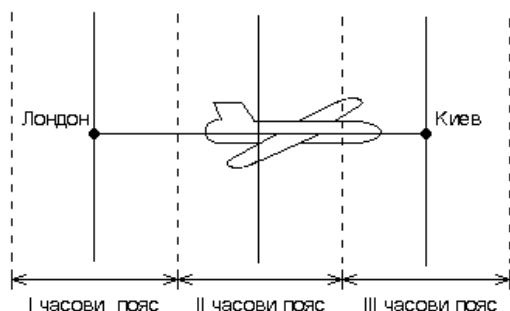
от II кръг на IV национална олимпиада по астрономия, 11 януари 2001 г.
УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС

Задача 1 (10 точки): На 9 януари е имало лунно затъмнение. Лунното затъмнение се получава, когато Луната навлезе в сянката, хвърляна от Земята. То може да се случи само когато Луната е във фаза пълнолуние. Следователно на 9 януари Луната е била в пълнолуние (**3 т.**). Лунните фази се редуват през период приблизително 29.5 денонощия (синодичен месец). Времето между две последователни основни лунни фази трябва да е около една четвърт от този интервал или 7.4 денонощия. Ето защо на Нова година, т.е. 9 дни преди 9 януари, Луната е била във фаза малко преди първа четвърт (**2 т.**). Тъй като във фаза първа четвърт ние виждаме осветена точно половината от видимия лунен диск, то в новогодишната нощ се е виждала осветена малко по-малко от половината от лунния диск и Луната е изглеждала така (**2 т.**):



Във фаза първа четвърт Луната е на 90° източно от Слънцето. Тъй като на фона на звездното небе Луната се движи от запад на изток, то малко преди първа четвърт Луната е била на малко по-малко от 90° източно от Слънцето. Следователно Слънцето, което осветява Луната, е било на запад от нея и затова осветената част от видимия лунен диск е била западната, т.е. дясната за нас (**3 т.**).

Задача 2 (10 точки):



Централните меридиани на всеки два съседни часови пояса отстоят на 15° един от друг по географска дължина. Лондон и Киев лежат на централните меридиани на I и III часови пояси съответно, и на един и същи географски паралел, по който става движението на самолета. Границите на часовите пояси

са прекарани точно по меридианите, отстоящи на по 7.5° от централните меридиани. Самолетът изминава разстоянието от Лондон до Киев за два часа, като се движи с постоянна скорост. Това означава, че самолетът изминава ширината на един часови пояс за 1 час, а на половината от часови пояс за половин час (**1 т.**).

Пътниците ще пропуснат отбелязването на Новата година, ако преминат през I и II часови пояси преди настъпването ѝ по времето, важащо за тези пояси, но навлязат в III часови пояс след настъпването на Новата година по неговото поясно време. Другата възможност е самолетът да напусне I часови пояс преди настъпването на Новата година там, но да навлезе във II часови пояс след настъпването на Новата година по неговото поясно време. Така че има два различни интервала от време, които представляват решение на задачата (**1 т.**).

Първият интервал е от $20^{\text{h}}30^{\text{m}}$ до $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$ (**1 т.**). Ако излети в $20^{\text{h}}30^{\text{m}}$ по лондонско време от Лондон, самолетът ще стигне до границата между I и II часови пояси за половин час, т.е. в $21^{\text{h}}00^{\text{m}}$. Това ще е в $22^{\text{h}}00^{\text{m}}$ по времето във II часови пояс. За един час самолетът ще прелети над II часови пояс и ще стигне до границата му с III часови пояс в $23^{\text{h}}00^{\text{m}}$. В този момент в III часови пояс ще стане $00^{\text{h}}00^{\text{m}}$ на 1 януари и пътниците ще отбележат настъпването на Новата година на границата между двата пояса. Следователно ако самолетът излети от Лондон само миг по-късно от началото на горепосочения интервал, при навлизането му в III часови пояс там Новата година вече ще е настъпила и

пътниците ще пропуснат отбелязването на този момент. Ако самолетът излети от Лондон в $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$ по лондонско време, т.е. в края на разглеждания интервал, в $22^{\text{h}}00^{\text{m}}$ той ще е на границата между между I и II часови пояси. По времето на II часови пояс това ще е в $23^{\text{h}}00^{\text{m}}$. За един час той ще прелети над II часови пояс и ще е на границата с III часови пояс в $00^{\text{h}}00^{\text{m}}$ на 1 януари по времето на II часови пояс. Следователно ако самолетът излети от Лондон само миг преди $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$, Новата година няма да може да се посрещне. Но ако излети в $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$ или малко по-късно, пътниците ще могат да посрещнат Новата година, прелитайки над II часови пояс **(3 т.)**.

Такава възможност те ще имат, обаче, само ако излетят от Лондон във времето между $21^{\text{h}}30^{\text{m}}$ и $22^{\text{h}}30^{\text{m}}$. След това настъпва вторият интервал от време на излитане, при който посрещането на Новата година се пропуска от пътниците. Това е интервалът от $22^{\text{h}}30^{\text{m}}$ до $23^{\text{h}}30^{\text{m}}$ по лондонско време **(1 т.)**. Ако самолетът излети след $22^{\text{h}}30^{\text{m}}$ по лондонско време, той стига до границата между I и II часови пояси след $23^{\text{h}}00^{\text{m}}$ по лондонско време, а във II часови пояс Новата година вече е настъпила. Но ако самолетът излети в $23^{\text{h}}30^{\text{m}}$ или по-късно по лондонско време, то пътниците ще имат възможността да посрещнат Новата година на борда му, още по лондонско време, преди самолетът да е достигнал до границата с II часови пояс **(3 т.)**.

Задача 3 (10 точки). Разстоянието до звездата, определено от земните астрономи, е $r = 30 \text{ ly}$. Превръщаме го в парсеци:

$$r = 30 \text{ ly} / 3.26 \approx 9.20 \text{ pc}$$

Паралаксът на звездата, измерен от земляните, е:

$$\pi_* = 1 / r [\text{pc}] \approx 0.109''$$

Това е ъгълът, под който радиусът $a_{\oplus}$ на земната орбита около Слънцето се вижда от звездата **(1 т.)**. Паралаксът на Слънцето, определен от "зелените астрономчета", е $\pi_{\odot} = 0.156''$. Това е ъгълът, под който радиусът a_{II} на орбитата на тяхната планета около звездата се вижда от Слънцето **(2 т.)**. В сила са съотношенията:

$$a_{\oplus} = r \pi_*$$

$$a_{\text{II}} = r \pi_{\odot}$$

Оттук получаваме:

$$a_{\text{II}} = a_{\oplus} \pi_{\odot} / \pi_* \quad \textbf{(2 т.)}$$

$$a_{\text{II}} \approx 1.431 a_{\oplus} = 1.431 \text{ AU}$$

Да означим с $T_{\oplus} = 1$ година периода на обикаляне на Земята около Слънцето и с T_{II} периода на обикаляне на планетата на "зелените човечета" около звездата. Звездата има същите физически характеристики като Слънцето, т.е. считаме, че тя има същата маса **(1 т.)**. Следователно можем да използваме III закон на Кеплер в следния вид:

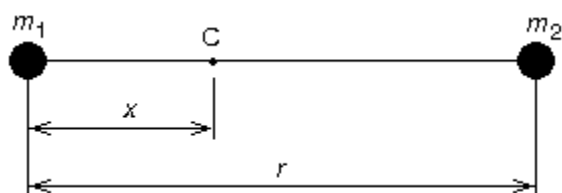
$$a_{\text{II}}^3 / a_{\oplus}^3 = T_{\text{II}}^2 / T_{\oplus}^2 \quad \textbf{(1 т.)}$$

Оттук намираме:

$$T_{\text{II}} = T_{\oplus} (a_{\text{II}}^3 / a_{\oplus}^3)^{1/2} \quad \textbf{(2 т.)}$$

$$T_{\text{II}} \approx 1.71 \text{ земни години} \approx 625 \text{ денонощия} \quad \textbf{(1 т.)}$$

Задача 4 (10 точки).



Означаваме с С точката, в която ще се сблъснат двата астероида. Избираме инерциалната координатна система така, че в началния момент скоростите и на двата астероида са равни на нула. Общият импулс на системата е нула, следователно и скоростта на центъра на масите също е нула.

При тези условия законът за запазване на импулса изисква по-нататък скоростта на центъра на масите да не се променя, т.е. да остава нулева. Центърът на масите през цялото време е неподвижен. В момента на сблъсъка положенията на двата астероида,

които считаме за точкови, съвпадат помежду си, а очевидно също и с положението на центъра на масите на системата. Следователно точката на сблъсък С съвпада с положението на центъра на масите на двата астероида в началния момент **(2 т.)**. Ако x е разстоянието от първия астероид в началния момент до центъра на масите, то:

$$x / (r - x) = m_2 / m_1 \quad (1 \text{ т.})$$

Оттук за местоположението на точката на сблъсък С намираме:

$$x = r m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{или} \quad r - x = r m_1 / (m_1 + m_2) \quad (1 \text{ т.})$$

Трябва да пресметнем времето, за което астероидите ще паднат един към друг. Разглеждаме движението на първия астероид в координатна система, в която вторият е неподвижен. Тъй като в началния момент скоростта на първия астероид е нула, можем да считаме, че той се движи относно втория астероид по много силно сплесната елипса, чиято голяма полуос е половината от началното разстояние между астероидите, или $r / 2$ **(3 т.)**. Всъщност орбитата, по която се движи първият астероид, има ексцентрицитет 0, тя е елипса, изродена в отсечка. "Периодът" на една пълна "обиколка" по тази елипса означаваме с T . Съгласно III закон на Кеплер в обобщения му вид:

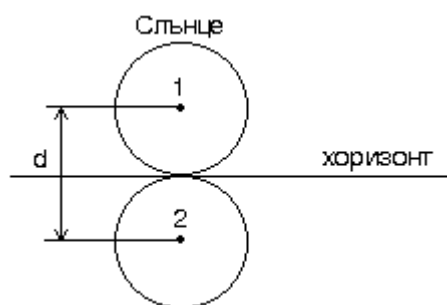
$$(r / 2)^3 / T^2 = G (m_1 + m_2) / 4\pi^2 \quad (1 \text{ т.})$$

$$T = \pi(r^3 / (2 G (m_1 + m_2)))^{1/2} \quad (1 \text{ т.})$$

При падането на първия астероид към втория, първият астероид изминава само половината от "елипсата". Следователно времето t , за което астероидите ще паднат един към друг, е половината от T :

$$t = \frac{1}{2} \pi(r^3 / (2 G (m_1 + m_2)))^{1/2} \quad (1 \text{ т.})$$

Задача 5 (10 точки):



На екватора Слънцето залязва вертикално надолу към хоризонта **(1 т.)**. От началото на зализа (положение 1) до края му (положение 2) Слънцето се премества на разстояние, равно на видимия му ъглов диаметър $d = 32'$ **(1 т.)**. Едно пълно завъртане по небесната сфера, или 360° , при своето видимо денонощно движение Слънцето

извършва за едно слънчево денонощие, или 24^h **(1 т.)**. Следователно за 1^h Слънцето се премества на $360^\circ / 24 = 15^\circ$, а 1° изминава за време $60^{\text{min}} / 15^\circ = 4^{\text{min}}$. Трябва да намерим времето t , за което Слънцето изминава видимия си ъглов диаметър. Първо превръщаме $32'$ в градуси:

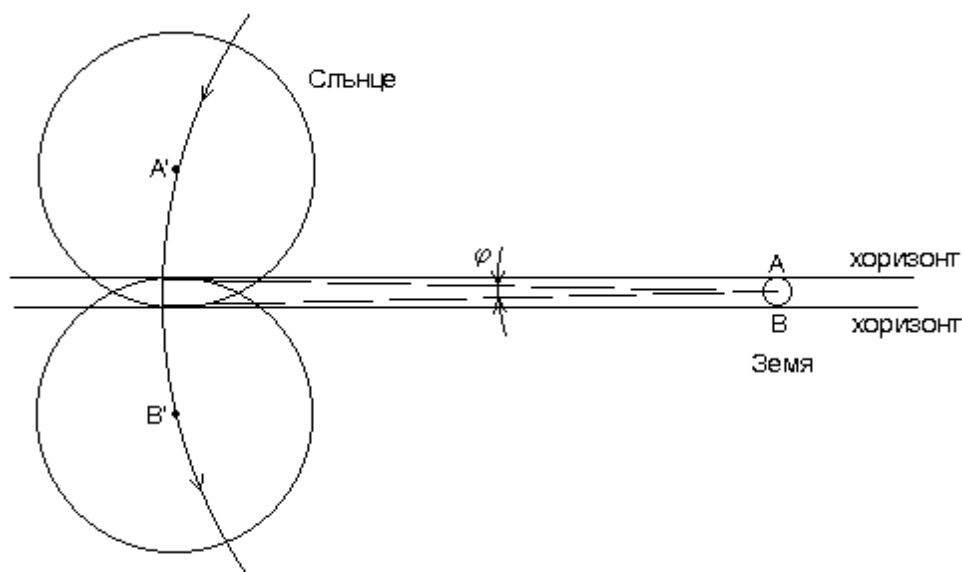
$$d^\circ = 32' / 60 \approx 0^\circ.53$$

Щом 1° се изминава за 4^{min} , то:

$$t = 0^\circ.53 \times 4^{\text{min}} \approx 2.13^{\text{min}} = 2^{\text{min}}08^{\text{sec}} \quad (2 \text{ т.})$$

Необходимо е да се отбележи, че този резултат се отнася само за случаите, когато Слънцето се намира на небесния екватор, т.е. в пролетната или есенната равноденствена точка. Ако деклинацията δ на Слънцето не е нула, то се движи по денонощен паралел, който не е голям кръг от небесната сфера. Тогава времето за зализа се удължава – полученият по-горе резултат трябва да се умножи с $1/\cos \delta$. Максимална стойност на този фактор се получава за дните на лятното и зимното слънцестояние, когато $\delta = \pm 23.5^\circ$, и $1/\cos \delta \approx 1.09$. Тогава $t = 2^{\text{min}}19^{\text{sec}}$. Тук обаче, не се изисква такава точност, за да се признае решението на задачата за правилно.

Тъй като линейният диаметър на Слънцето е по-голям от диаметъра на Земята, то за диаметрално противоположните точки на земния екватор А и В ще съществува интервал от време, през който и за двете точки ще има части от видимия слънчев диск, които да са над хоризонта **(1 т.)**.



Както се вижда от чертежа, това ще е интервалът от време, за който центърът на слънчевия диск ще се премести при своето видимо денонощно движение от точка A' до точка B' **(1 т.)**. Слънцето трябва да измине ъглово разстояние, равно на неговия видим ъглов диаметър d минус ъгъла φ . Това е ъгълът, под който Земята би се виждала от разстояние, равно на линейното разстояние до Слънцето **(1 т.)**. Линейният диаметър на Слънцето е 109 пъти по-голям от линейния диаметър на Земята. Следователно видимият от Земята ъглов диаметър на Слънцето е 109 пъти по-голям от ъгъла φ . Ъгловото разстояние A'B' ще бъде равно на $d - d / 109 =$ $= (108/109)d$. Оттук и времето, за което Слънцето изминава това разстояние, ще е:

$$t_1 = (108/109) t \quad \textbf{(1 т.)}$$

при което използваме получения вече резултат за времето t – времето, за което Слънцето изминава целия си ъглов диаметър.

$$t_1 \approx 2^{\text{min}}07^{\text{sec}} \quad \textbf{(1 т.)}$$

Забележка: Тук не отчитаме рефракцията. Бихме могли да оценим приблизително нейното влияние, като имаме предвид, че на хоризонта ъгълът на рефракция може да достигне $30'$. Това значително удължава търсения интервал от време, през който части от видимия слънчев диск има над хоризонта и за двете точки A и B. Центърът на видимия слънчевия диск изминава ъглово разстояние от $30'$ за време, равно на $0.5^\circ \times 4^{\text{min}} = 2^{\text{min}}$. Части от слънчевия диск са започнали да се виждат над хоризонта за точка B именно 2^{min} преди достигането на центъра на слънчевия диск в точка A'. Освен това части от слънчевия диск са продължили да се виждат над хоризонта за точка A също 2^{min} след като центърът на слънчевия диск премине през точка B'. Следователно търсеният интервал от време е:

$$2^{\text{min}} + 2^{\text{min}}07^{\text{sec}} + 2^{\text{min}} \approx 6^{\text{min}}.$$